Deus, Augusto Manuel Moura Moita de, 1966-

Nada monótonos : os monoladrilhos einstein

http://hdl.handle.net/11067/7687
https://doi.org/10.34628/tx0n-v140

Metadados

Data de Publicação 2024

Resumo Os mosaicos e ladrilhos sempre fascinaram a humanidade, não só pelos aspectos práticos em termos de construção, mas também pelo seu apelo estético. Normalmente os padrões neles representados apresentam simetria de translação, mas nos anos 60 do século passado verificou-se que existiam distribuições de ladrilhos que, revelando ordem, não obedeciam à dita simetria. O número de peças necessárias para tais pavimentações, ditas aperiódicas, rapidamente passou de mais de 20000 para 2. No entanto, pass...

Tipo bookPart

Editora Universidade Lusíada Editora

ISBN 978-898-640-249-2

Nada monótonos: os monoladrilhos einstein

Augusto Moita de Deus
DOI: https://doi.org/10.34628/tx0n-v140
Dep. Eng. Mecânica e CeFEMA, Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa
amd@tecnico.ulisboa.pt

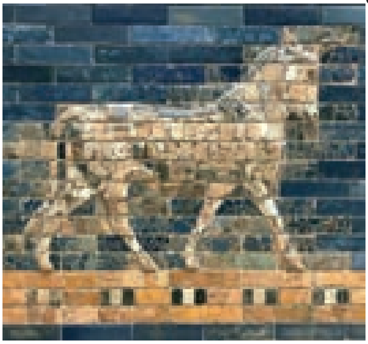
Resumo: Os mosaicos e ladrilhos sempre fascinaram a humanidade, não só pelos aspectos práticos em termos de construção, mas também pelo seu apelo estético. Normalmente os padrões neles representados apresentam simetria de translação, mas nos anos 60 do século passado verificou-se que existiam distribuições de ladrilhos que, revelando ordem, não obedeciam à dita simetria. O número de peças necessárias para tais pavimentações, ditas aperiódicas, rapidamente passou de mais de 20000 para 2. No entanto, passaram-se décadas e não se conseguia encontrar um ladrilho, uma "pedra" única (em alemão, "ein stein") que permitisse pavimentar o plano apenas de maneira aperiódica. Até que em 2023 David Smith e mais 3 co-autores conseguiram encontrar a tal peça única deste puzzle, a dois tempos diga-se. Neste artigo descreve-se de forma sucinta esse trajecto de descoberta, enfatizando a beleza dessas estruturas, bem como a sua relação com a razão áurea e com a sequência de Fibonacci. Por fim, mencionam-se brevemente as investigações que estão a ser realizadas no Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa, usando a impressão 3D, quanto à capacidade de absorção de energia dessas estruturas, sendo os resultados promissores.

Palavras-chave: Pavimentação do plano, aperiódico, ladrilhos, Penrose, einstein, hat, spectre, razão áurea.

1. Introdução

É um facto histórico que muitas civilizações antigas tinham um fascínio por mosaicos e ladrilhos. Não é apenas o aspecto prático de revestir toda uma área de uma parede ou de um pavimento com pequenas peças de fácil fabrico, com que depois se compõe o todo. É essencialmente a beleza que resulta de agrupar tais elementos, normalmente de forma periódica, cíclica, repetitiva. Desde a Mesopotâmia (Figura 1a), passando pela Arte Romana (Figura 1b) ou Islâmica (Figura 1c), e chegando aos Azulejos Portugueses (Figuras 1d-f), as possibilidades permitidas pelo agrupamento de pequenos polígonos são virtualmente infinitas. Normalmente na forma de quadrados ou rectângulos, seja com padrões iguais ou similares, seja com figuras desenhadas em continuidade com os elementos vizinhos, são habitualmente objectos de grande beleza, o que lhes confere um lugar especial em arquitectura.

a



b

c

d

Figura 1 - Pavimentações: a) Mesopotâmia (Portão de Ishtar); b) Império Romano (Coninbriga); c) Arte islâmica (Samarcanda, Uzbequistão); d) Azulejos portugueses (Museu Nacional do Azulejo); e,f) Azulejos portugueses, casa particular.

2. A Pavimentação Periódica do Plano

A questão da pavimentação dum plano é também um problema matemático interessante. Se considerarmos polígonos regulares, é possível demonstrar que o plano pode ser pavimentado pela junção, apenas, de triângulos equiláteros iguais (ordem 3), ou de quadrados iguais (ordem 4), ou de hexágonos iguais (ordem 6). Essas distribuições têm claramente simetria de translação (Figura 2a-c). Mas no caso de pentágonos regulares, por exemplo, isso já não se torna possível. Vê-se claramente que esse tipo de simetria (ordem 5) não permite preencher totalmente o espaço (Figura 2d).

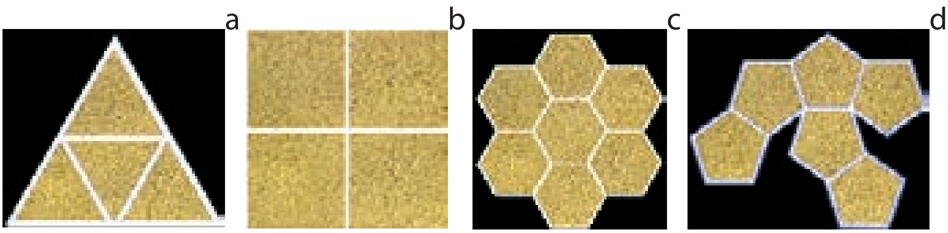


Figura 2 - Pavimentações perfeitas (a-c) e imperfeita (d) do plano com: a) triângulos equiláteros; b) quadrados; c) hexágonos regulares; d) pentágonos regulares.

E se se pintar cada um desses mosaicos? Aí reside essencialmente a arte do azulejo. Neste caso não estamos interessados no caso em que meramente se represente um desenho único. Se agruparmos tais azulejos de uma determinada forma, de modo a produzir um padrão local, a convicção do matemático Wang era que esse padrão acabaria inevitavelmente por se repetir, mais perto ou mais longe, exibindo assim simetria de translação (Figura 3). Era a chamada Conjectura de Wang, proposta em 1961.

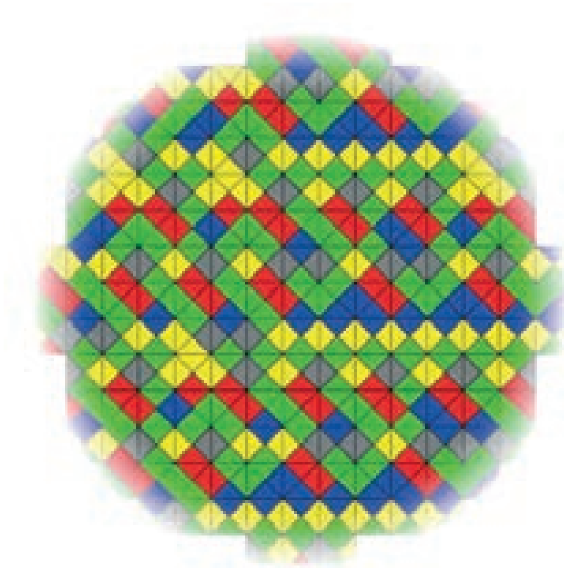


Figura 3 - Pavimentação de Wang.

3. A Pavimentação Aperiódica do Plano

Há uma diferença fundamental entre Conjectura e Teorema. A primeira, quando é provada com rigor, transforma-se na segunda. Mas basta um contra-exemplo para travar inapelavelmente esse processo. E foi isso que um antigo discípulo de Wang, Berger, fez em 1964: encontrou um contra-exemplo envolvendo 20246 ladrilhos, um feito absolutamente notável. Nesse caso, ele descobriu a primeira pavimentação aperiódica do plano. Só para clarificar: trata-se dum padrão ordenado, localmente bem definido. Se se tentar fazer copy-paste de uma dessas regiões para outra região, até se pode conseguir uma coincidência, mas se se tentar repetir esse processo para outras distâncias em sucessão, isso torna-se impossível. Realmente, não há simetria de translação.

A partir daí foi dado o tiro de partida para ver qual o número mínimo de mosaicos necessários para produzir uma pavimentação aperiódica. Berger conseguiu mais tarde passar tal número para 104, o famoso Knuth (inventor do TeX, entre outros feitos na Informática) para 92, até que o famoso físico e prémio Nobel recente Roger Penrose conseguiu reduzir tal número para apenas 2.

4. A Pavimentação de Penrose

É um facto muito curioso que as pavimentações aperiódicas a duas peças estavam mesmo ali debaixo do nariz de toda a gente, qual Ovo de Colombo apenas posto de pé pelo génio de Penrose, provavelmente um dos últimos polímatas vivos, Prémio Nobel da Física em 2020 pelos seus trabalhos em Relatividade Geral relacionados com Buracos Negros. Notem-se dois dos padrões de Penrose (Figura 4). São particularmente belos e nota-se ali como que o aparecimento de figuras de simetria 5, pentagonais. Parece mesmo a vingança dos pentágonos, que tinham sido arredados desta bela temática das pavimentações do plano.

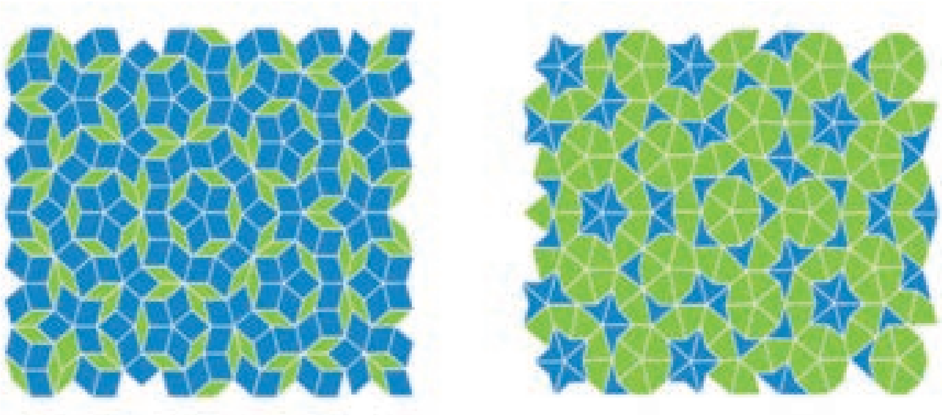


Figura 4 - Pavimentações de Penrose

Estes ladrilhos já são usados extensamente em arquitectura, notavelmente no edifício do Departamento de Matemática de Cambridge (Figura 5), a que Penrose pertence, neste caso o edifício Andrew Wiles, nome do matemático que provou o famoso Teorema de Fermat.

Figura 5 - Pavimentação Penrose no exterior do edifício do Mathematical Institute da Universidade de Oxford

Tal padrão tem sido usado noutros locais, conforme visto neste caso no Texas, com Roger Penrose em primeiro plano (Figura 6a) ou no exterior da Biblioteca do St. John's College na rival Universidade de Cambridge (Figura 6b), sendo que nesta ocorrência há uma deliciosa coincidência britânica (coincidência, ou talvez não): tal Biblioteca situa-se no Edifício Penrose, cujo nome evoca o arquitecto construtor de tal edifício, Francis Cramer Penrose, que tanto quanto se sabe não era aparentado de Roger Penrose. Curiosamente, F.C. Penrose interessava-se pelos padrões geométricos encontrados na Grécia Clássica, nomeadamente no Partenon, de Atenas.

a b

Figura 6 - a) Sir Roger Penrose pisando um padrão de Penrose no átrio do Mitchell Institute for Fundamental Physics and Astronomy, na Universidade Texas A&M ; b) Exterior da Biblioteca do St. John's College, Universidade de Cambridge.

4.1 Os Quasicristais

Estes padrões não só têm interesse matemático e estético, mas existe também interesse científico, que redundou na atribuição do Prémio Nobel da Química a Dan Shechtman, em 2011, pela descoberta dos quasicristais (Figura 7a,b), estruturas em que é possível fazer uma identificação muito próxima com os padrões de Penrose (Figura 7c). Essa investigação aliás reveste-se de contornos épicos e que são profundamente inspiradores para qualquer pessoa que tenta promover uma ideia original fora-da-caixa. Schechtman estudava ligas alumínio-manganês quando a dada altura detectou padrões estranhos nas experiências de difracção de raios-X, nomeadamente simetrias de ordem 10, coerentes com uma geometria icosaédrica. Ora, isso é incompatível com a definição clássica de cristal, que implica a existência de simetria de translação, que neste caso simplesmente não existe (apenas existe no caso de simetrias de ordem 3, 4 ou 6, como vimos anteriormente). Mas nestes materiais existe ordem, ie regras matemáticas quanto à distribuição espacial dos átomos, e ao mesmo tempo uma repetição atómica a curta distância, característica dos cristais, e daí a designação de quasicristais. Schechtman repetiu as experiências durante 2 anos e perante os mesmos resultados, decidiu publicar os mesmos. Várias revistas científicas recusaram a publicação, e o líder do grupo onde Dan trabalhava pediu para ele se demitir, devido à má fama que os resultados aparentemente sem sentido estavam a trazer ao grupo. O principal opositor de tais descobertas foi aliás o duplo vencedor de Prémios Nobel, Linus Pauling, que declarou: “Não existem quasicristais, apenas quasicientistas”. Mas o que é facto é que existem mesmo. Centenas de tais materiais foram já sintetizados e quasicristais foram inclusivamente detectados em amostras de meteoritos. Inúmeras aplicações existem já, ou estão em desenvolvimento, desde a produção de aços mais resistentes a revestimentos com baixo coeficiente de atrito. Esta é uma história não apenas sobre quasicristais, mas mais até sobre o poder da convicção e perseverança humana, baseada em factos.

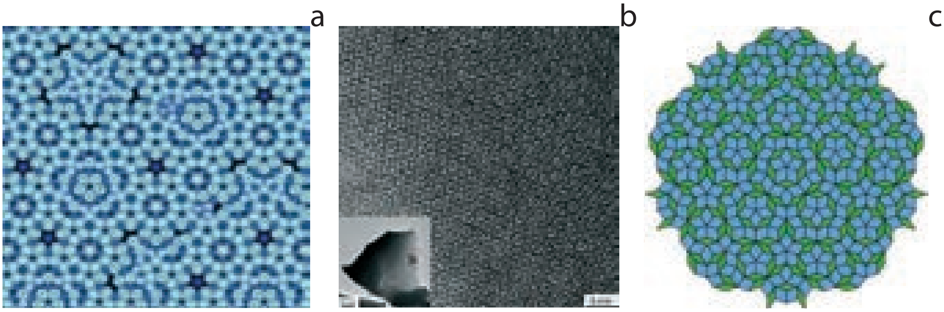


Figura 7 - a) Estrutura de um quasicristal de alumínio–paládio–manganês. b) Imagem de microscopia electrónica de transmissão de um quasicristal natural detectado no meteorito de Khatyrka; c) Pavimentação de Penrose.

4.2 Os Padrões de Penrose e a Razão Áurea

Regressemos aos padrões de Penrose, para verificar a sua relação com a famosa razão de ouro, . Uma das variantes das pavimentações de Penrose envolve duas figuras: o "papagaio" e o "dardo" ("kite" e "dart", no original, Figura 8a). Ora, à medida que a pavimentação se torna mais extensa, a razão entre o número de mosaicos "papagaio" e "dardo" tende para a razão de ouro, φ. Além disso, tal número surge directamente nas dimensões da própria figura, e o mesmo sucede noutra variante (Figura 8b), que no fundo está intimamente ligada ao pentágono regular e ao respectivo pentagrama inscrito (Figura 8c).

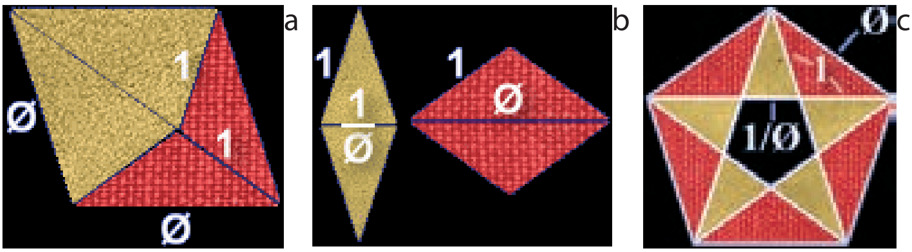


Figura 8 - A ocorrência da razão de ouro em mosaicos Penrose (a, b); c) pentágono regular.

É também possível detectar a sequência de Fibonacci em pavimentações Penrose, sendo amplamente conhecida a relação estreita entre essa sequência e φ.

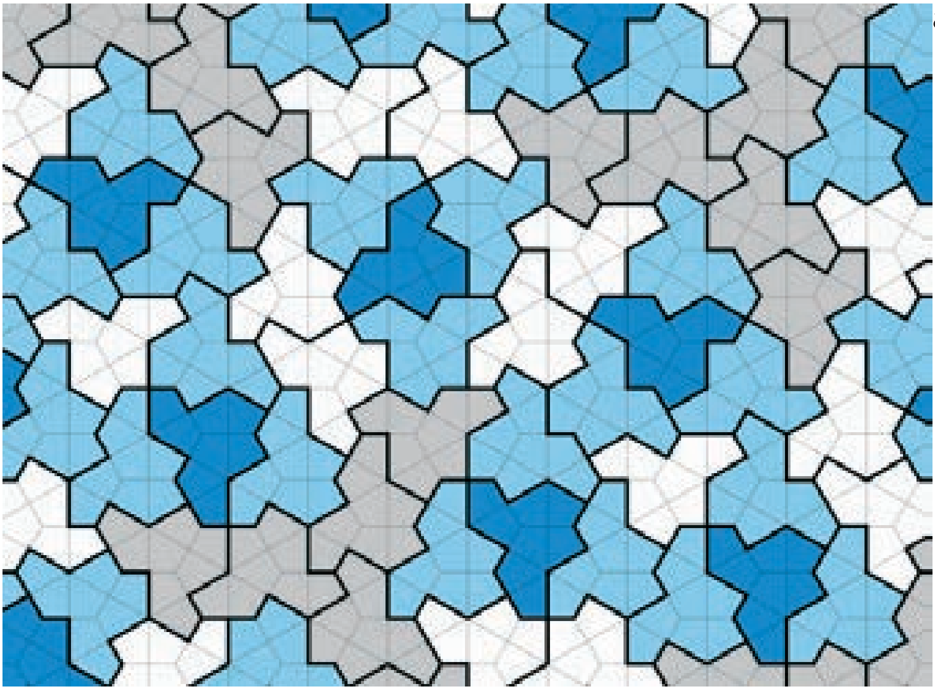
5. Os monoladrilhos einstein

5.1 O "hat"

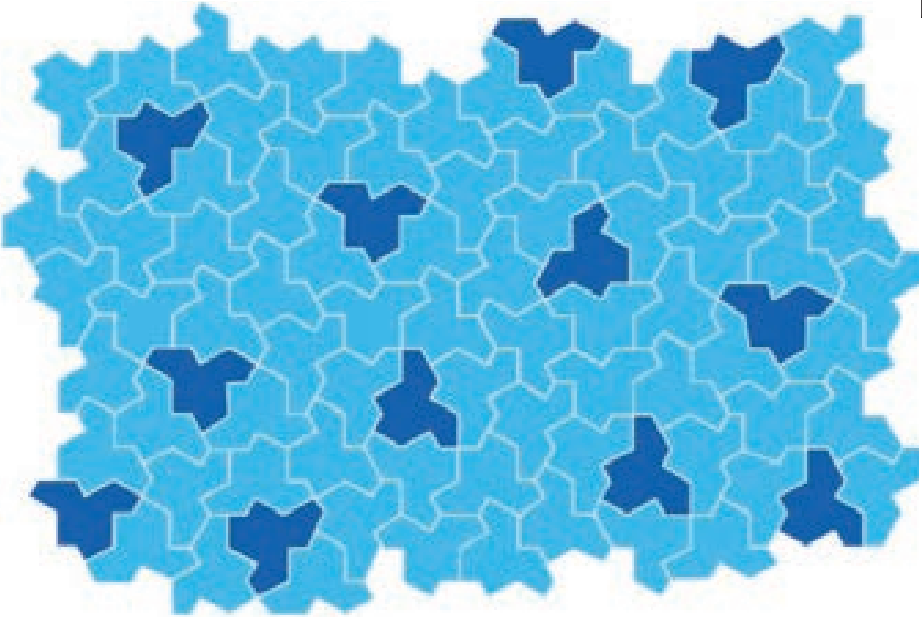
Depois do trabalho de Penrose, vários autores tentaram encontrar o ladrilho único, a "única pedra" (em alemão, ein stein), que permitisse preencher o plano, apenas de forma aperiódica, com uma única peça. No entanto, as formas propostas eram estranhas e exóticas (por exemplo tais peças tinham formatos não-conexos). Até que em Novembro de 2022, um engenheiro reformado fã desta boa temática das pavimentações do plano começou a brincar com uma forma que ele rapidamente constatou que poderia ser o tal monoladrilho. David Smith, de Yorkshire, Inglaterra (é assim que ele assina os papers, o que é delicioso; nada de inserir instituições científicas ou outras como afiliação) tinha em mãos (literalmente, visto que ele realmente recortava e compunha tais pavimentações) a possível conclusão da demanda do santo graal desta área da geometria.

Tal monoladrilho (Figura 9) foi denominado "hat" (chapéu), embora pareça também uma t-shirt. Em busca de validação matemática, Smith contactou Craig Kaplan, académico da área da Informática na Universidade de Waterloo, Ontário, e pouco depois juntaram-se a eles Joseph Samuel Myers (especialista no domínio da informática) e o matemático Chaim Goodman-Strauss, da Universidade de Arkansas. Essa equipa publicou em Março de 2023 um paper com o título triunfal "An aperiodic monotile", com a prova de que aquele ladrilho permitia cobrir o plano. Bem, com um pequeno detalhe: por vezes era necessário usar, não o ladrilho-base, mas o seu reflexo no espelho. Para muitos matemáticos, tratava-se basicamente do mesmo ladrilho. Mas algumas vozes críticas se levantaram, alegando que se tratavam de duas figuras diferentes. Qual seria a resposta?

Já lá vamos. Mas antes notemos como a razão áurea surge de novo nesta estrutura. Não somente a razão entre peças base e as suas imagens no espelho é função de φ (neste caso a proporção é $\varphi^4 : 1$), como a forma como "chapéus" posicionados de forma semelhante parece obedecer a uma sequência directamente relacionada com a sucessão de Fibonacci. Por outro lado temos uma figura com 13 lados, baseada em 8 porções de hexágonos. A seguir ao 5 que aparecia de forma proeminente no caso das pavimentações Penrose, temos aqui os termos seguintes da sequência de Fibonacci, o que pode contudo ser apenas uma coincidência.



a



b

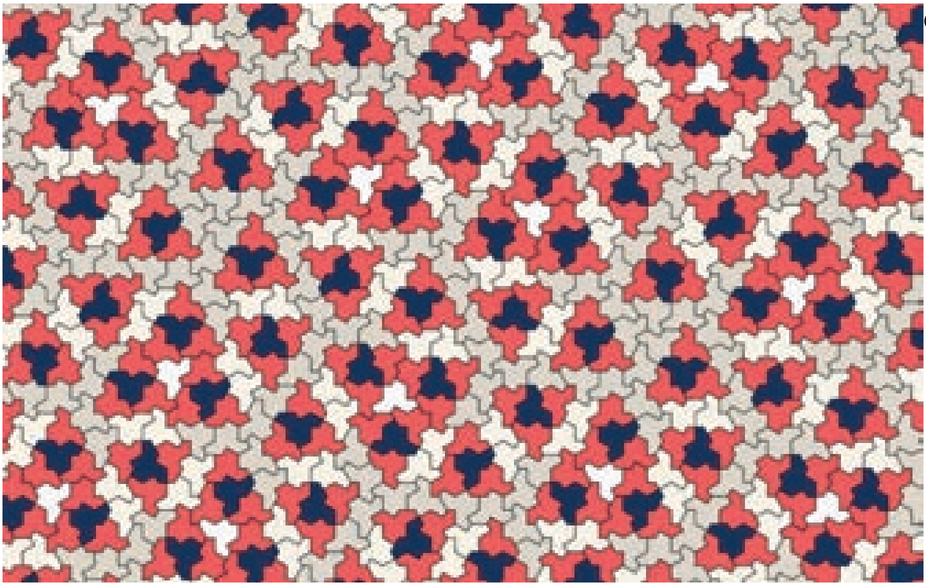

c

Figura 9 - O monoladrilho "hat"; a) Notar como o "hat" assenta directamente numa base composta de hexágonos regulares; cada um desses ladrilhos é composto de 8 regiões com a geometria de 1/6 de hexágono; b) as peças mais escuras são imagens ao espelho das peças mais claras; curiosamente a proporção entre esses dois tipos de peças também envolve o número de ouro: $\varphi^4 : 1$; c) tal como os ladrilhos Penrose, o "hat" também é esteticamente apelativo.

5.2 O "spectre"

Após a dúvida lançada sobre se o "hat" era mesmo o verdadeiro einstein, os autores voltaram a surpreender o mundo, propondo em Maio de 2023 (fazendo lembrar a prova da conjectura de Fermat também em duas etapas, por parte de Andrew Wiles, só que aqui de forma muito mais rápida- apenas 2 meses!) uma figura que realmente é definitivamente única e que apenas consegue cobrir o plano de forma aperiódica, o denominado "spectre" (Fig 9). É no fundo uma adaptação do "hat", só que agora temos uma figura com 14 lados, todos de comprimento igual (ou 13 lados, em que um deles tem o dobro do comprimento), e ângulos rectos ou de 120º. Considerando que tal lado é unitário, a área de cada ladrilho é simplesmente igual a $3\sqrt{3}+3$, que curiosamente é aproximadamente igual à área dum círculo com raio igual à razão áurea ($\pi\varphi^2$, com erro de cerca de 0.35%).

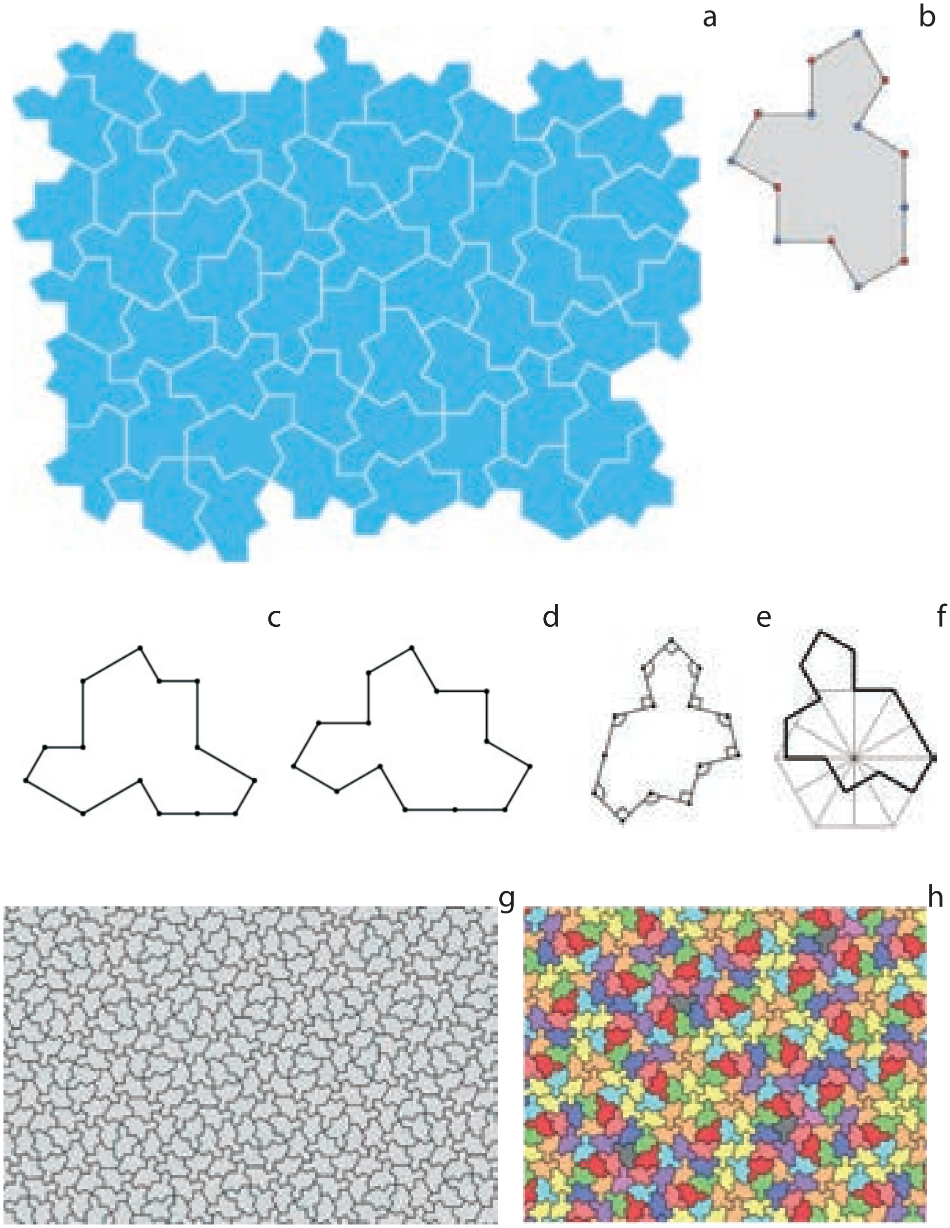


Figura 10 - O monoladrilho "spectre"; a) apenas um ladrilho, sem reflexões; b) a distância entre os pontos é sempre igual, ao contrário do caso do hat; c) comparação "hat" vs. d) "spectre"; e) ângulos de 90 e 120º, apenas, no "spectre"; f) como o "spectre" assenta num hexágono regular; g,h) as peças encaixam todas mas não há periodicidade, o que torna a figura sempre diferente, o que confere uma característica de ausência de "monotonia" à estrutura.

A configuração "spectre" tem sido estudada no Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa, tendo dado origem recentemente a uma Tese de Mestrado em Engenharia de Materiais. Através da impressão 3D de amostras com esse formato no plano (Figura 11), estudou-se o comportamento mecânico de tais peças, sendo que a evidência preliminar aponta para o facto de tal configuração aparentar ser particularmente adequada para suportar cargas compressivas e também de impacto, visto que o dano, em vez de se concentrar em bandas, que rapidamente podem levar ao colapso da estrutura, parece que se distribui por toda a peça, o que torna tais configurações candidatas a ser usadas em aplicações visando a absorção de choques ou a resistência a esforços de compressão.

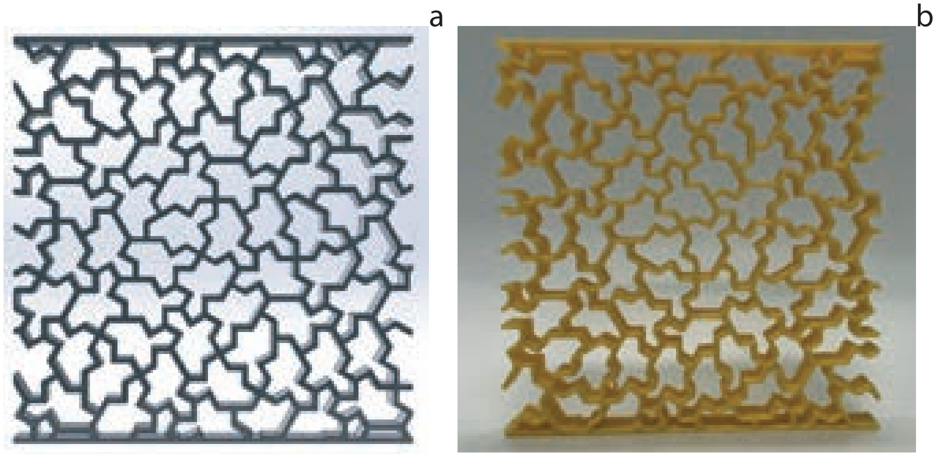


Figura 11 - Configuração "spectre" estudada no Instituto Superior Técnico, por via de ensaios mecânicos; a) imagem CAD; b) peça impressa em 3D.

6. Conclusão

Apresentou-se um resumo da evolução do problema da pavimentação aperiódica do plano, culminando na descoberta dos monoladrilhos einstein. Deu-se um enquadramento breve quanto à importância dos mosaicos e ladrilhos ao longo da história da Humanidade. Falou-se nas pavimentações de Wang e de Penrose, e como estas últimas têm vindo a ser incorporadas em contexto de arquitectura. Abordou-se a história inspiracional da descoberta dos quasicristais. E, finalmente, descreveu-se o aparecimento das estruturas einstein, desde logo o "hat", mas também o "spectre". Fez-se quando possível a relação entre essas estruturas e um número com significado especial em matemática e arquitectura, φ, a razão áurea, e mencionou-se a pesquisa realizada no Instituto Superior Técnico relacionada com o comportamento de estruturas "spectre" produzidas por impressão 3D. Tentou-se destacar não somente o valor matemático e prático de tais estruturas, mas também a sua beleza estética.

7. Agradecimentos

Agradece-se ao Professor Jorge Buescu (Fac. Ciências, Univ. Lisboa) por discussões sobre o tema, e ao Professor David Richeson (Dickinson College, Pensilvânia), pela determinação da área do "spectre".

Bibliografia Recomendada

Monoladrilhos Einstein:

Jorge Buescu, "Einstein on the plane", Ingenium 181, Jul 202, p. 150-153.

David Richeson, A Brief History of Tricky Mathematical Tiling, https://www.quantamagazine.org/a-brief-history-of-tricky-mathematical-tiling-20231030/

Minerva da Costa Martins, Tese de Mestrado em Engenharia de Materiais, Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa, "Design, production, modeling and characterization of sandwich cores based on aperiodic tilings", 27-06-2024. Orientadores: Maria de Fátima Vaz (IST), Augusto Moita de Deus (IST).

David Smith, Joseph Samuel Myers, Craig S. Kaplan, and Chaim Goodman-Strauss, "An aperiodic monotile", https://cs.uwaterloo.ca/~csk/hat/

David Smith, Joseph Samuel Myers, Craig S. Kaplan, and Chaim Goodman-Strauss,"A chiral aperiodic monotile", https://cs.uwaterloo.ca/~csk/spectre/

David Smith, "The special one", https://hedraweb.wordpress.com/2023/06/02/the-special-one/

Simon Tatham," Combinatorial coordinates for the aperiodic Spectre tiling", https://www.chiark.greenend.org.uk/~sgtatham/quasiblog/aperiodic-spectre/

<u>Pavimentações Wang e Penrose, Quasicristais</u>

https://en.wikipedia.org/wiki/Wang_tile#Domino_problem

https://www.goldennumber.net/penrose-tiling/

The Infinite Pattern That Never Repeats, Veritasium, https://www.youtube.com/watch?v=48sCx-wBs34

https://www.atlasobscura.com/places/penrose-paving-at-the-mathematical-institute

https://en.wikipedia.org/wiki/Penrose_tiling

https://www.joh.cam.ac.uk/library-tiling-inspired-work-nobel-prize-winner-sir-roger-penrose-0

https://en.wikipedia.org/wiki/Quasicrystal

<u>Outras referências</u>

https://whytile.com/tile-history/ceramic-tile-origins/

https://www.meisterdrucke.pt/impressoes-artisticas-sofisticadas/Mesopotamian-Mesopotamian/982605/Mesopot%C3%A2mia%3A-%22touro-em-movimento%22.-Azulejos-esmaltados-do-port%C3%A3o-de-Ishtar.-Babil%C3%B4nia-%28Iraque%29-na-%C3%A9poca-do-rei-Nabucodonosor-II.-Museu-Nacional-do-Iraque-Iraque.html

https://www.quintadoriodao.com/eng/out/conimbriga.html

https://en.wikipedia.org/wiki/Girih

https://www.e-cultura.pt/patrimonio_item/8027

https://en.wikipedia.org/wiki/Wiles%27s_proof_of_Fermat%27s_Last_Theorem

Nota: todos os links www foram acedidos em 3/11/2024